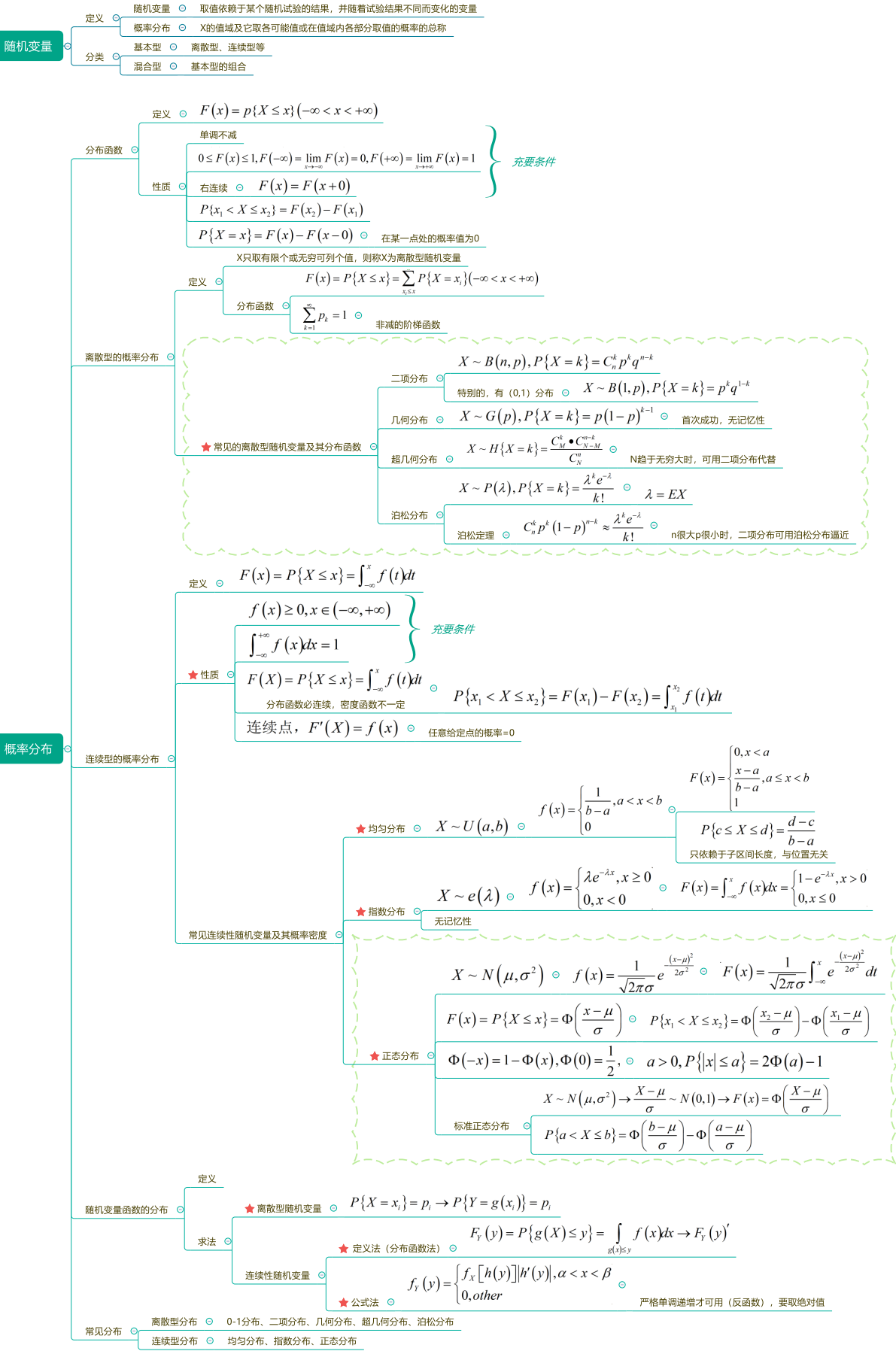


随机变量及其分布



离散型的概率分布

定义

X只取有限个或无穷可列个值，则称X为离散型随机变量

$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} (-\infty < x < +\infty)$

分布函数

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$

非减的阶梯函数

★常见的离散型随机变量及其分布函数

二项分布

$X \sim B(n, p), P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

特别的，有 (0,1) 分布

$X \sim B(1, p), P\{X = k\} = p^k q^{1-k}$

几何分布

$X \sim G(p), P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$

首次成功，无记忆性

超几何分布

$X \sim H\{X = k\} = \frac{C_M^k \bullet C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$

N趋于无穷大时，可用二项分布代替

泊松分布

$X \sim P(\lambda), P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

$\lambda = EX$

泊松定理

$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

n很大p很小时，二项分布可用泊松分布逼近

概率分布

定义

$F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

★性质

$f(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$F(X) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

分布函数必连续，密度函数不一定

$P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$

连续点， $F'(X) = f(x)$

任意给定点的概率=0

连续型的概率分布

★均匀分布

$X \sim U(a, b)$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, a < x < b \\ 0 \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x < b \\ 1 \end{cases}$

$P\{c \leq X \leq d\} = \frac{d-c}{b-a}$

只依赖于子区间长度，与位置无关

★指数分布

$X \sim e(\lambda)$

$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}$

无记忆性

★正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

$F(x) = P\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \Phi(0) = \frac{1}{2}, a > 0, P\{|X| \leq a\} = 2\Phi(a) - 1$

标准正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \rightarrow F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

$P\{a < X \leq b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

随机变量函数的分布

定义

★离散型随机变量

$P\{X = x_i\} = p_i \rightarrow P\{Y = g(x_i)\} = p_i$

求法

★定义法 (分布函数法)

$F_Y(y) = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f(x)dx \rightarrow F_Y(y)'$

连续型随机变量

$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]|h'(y)|, \alpha < x < \beta \\ 0, other \end{cases}$

★公式法

严格单调递增才可用 (反函数)，要取绝对值

常见分布

离散型分布

0-1分布、二项分布、几何分布、超几何分布、泊松分布

连续型分布

均匀分布、指数分布、正态分布